nナッチ数列の隣接2項間の比の極限

清友 宏紀　瀧 翔太　小倉 康誠　草野 佑希

フィボナッチ数列とは

- 初項１、それ以降の項は前２つの項の和で表される数列。

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,･･･}

{ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,･･･}

{ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,･･･}

{ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,･･･}

じゃあ一般化しよう！！

トリボナッチ数列　{1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ・・・}

テトラナッチ数列　{1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, ・・・}

ペンタナッチ数列　{1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, ・・・}

⋮

Nナッチ数列　{1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ・・・}

数学的に表記すると、自然数a, nと、0以下の整数mについて、$\begin{cases} F_1^{(a)} = 1 \\ F_m^{(a)} = 0 \\ F_{n+1}^{(a)} = \sum_{k=0}^{a-1} F_{n+k} \end{cases}$ と定義される

研究目的

- 極限「$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}^{(a)}}{F_n^{(a)}}$」を調べる。

証明の流れ図

$\left\{\begin{array}{l} \text{補題1－1} \\ \text{補題1－2} \\ \text{補題1－3} \\ \text{補題1－4} \\ \text{補題1－5} \end{array}\right.$ ➡

命題1
$a \geq 2$のとき、方程式
$x^a - x^{a-1} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$の
唯一の正の実数解$x = t$について、その他の解の絶対値は$|t|$より小さい。

$\left\{\begin{array}{l} \text{補題1－2} \\ \text{補題2－1} \\ \text{補題2－2} \\ \text{補題2－3} \\ \text{命題1} \end{array}\right.$ ➡

命題2
数列$\{F_n^{(a)}\}$の一般項は、
$F_n^{(a)} = A_1 e_1^n + A_2 e_2^n + \cdots + A_a e_a^n$
と、表される。

➡ 証明

証明の流れ

- まずは、「nナッチ数列」の一般項を求めた。

$$\boxed{F_n^{(a)} = A_1 e_1^n + A_2 e_2^n + \cdots + A_a e_a^n}$$

- $e_1, e_2, \cdots, e_a$はそれぞれ、方程式
  $x^a - x^{a-1} - x^{a-2} - \cdots - x - 1 = 0$の$a$個の解を絶対値が大きい順に並べたものである。（$|e_1| > |e_2| \geq |e_3| \geq \cdots \geq |e_a|$でかつ$e_1 \in \mathbb{R}$であることを証明済み）

- $A_1, A_2, \cdots, A_a$はそれぞれある定数
  （本研究では具体的な数値を求める必要がない）

証明の流れ　2

- $$\frac{F_{n+1}^{(a)}}{F_n^{(a)}} = \frac{A_1\, e_1^{\,n+1} + A_2\, e_2^{\,n+1} + \cdots + A_a\, e_a^{\,n+1}}{A_1\, e_1^{\,n} + A_2\, e_2^{\,n} + \cdots + A_a\, e_a^{\,n}} \times \frac{\frac{1}{e_1^{\,n}}}{\frac{1}{e_1^{\,n}}}$$

$$= \frac{A_1 e_1 + A_2\, e_2\left(\frac{e_2}{e_1}\right)^n + \cdots + A_a\, e_a\left(\frac{e_a}{e_1}\right)^n}{A_1 + A_2\left(\frac{e_2}{e_1}\right)^n + \cdots + A_a\left(\frac{e_a}{e_1}\right)^n}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{A_1 e_1 + 0 + \cdots + 0}{A_1 + 0 + \cdots + 0} = e_1$$ ←収束値

ここで、$|e_1| > |e_\square|$ より、

$$\left|\frac{e_\square}{e_1}\right| < 1$$

となり、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e_\square}{e_1}\right)^n = 0$$

である。

収束値についてまとめ・考察

- 前スライドまでで、$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}^{(a)}}{F_n^{(a)}} = e_1 \in \mathbb{R}$であることを示した。
- 一般に、$1 \leq e_1 < 2$

  $a \geq 2$のとき、$e_1 \notin \mathbb{Q}$を証明した。
- e_1は方程式$x^a - x^{a-1} - x^{a-2} - \cdots - x - 1 = 0$の実数解であるが、$a \geq 5$のとき、5次以上の方程式の解になるため代数的な数でない可能性がある。

今後の展望

1. 命題や補題についてより簡潔な証明方法がないか調べる。
2. aを変数として、数列$\{G_a\} = \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}^{(a)}}{F_n^{(a)}}\right\}$を考える。
3. nナッチ数列の逆数和やnナッチ数列におけるゼッケンドルフの定理など、他の定理でnナッチ数列への一般化を考える。

参考文献

- 青空学園数学科「スルツムの定理 根の限界」
  http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwaNch02/node26.html , 2021/9/22最終閲覧
- OKWAVE 「トリボナッチ数列とコーシー列」
  https://okwave.jp/qa/q8138410.html , 2021/9/22最終閲覧
- 結城浩 「ミルカさんとフィボナッチ数列」
  https://www.hyuki.com/story/genfunc.pdf , 2021/9/26最終閲覧
- 高校数学の美しい物語 「因数定理とその重解バージョンの証明」
  https://manabitimes.jp/math/1050 , 2021/9/27最終閲覧